ISTITUTO LOMBARDO - ACCADEMIA di SCIENZE e LETTERE

FRANCESCO BRIOSCHI (1824-1897)
CONVEGNO DI STUDI MATEMATICI

INCONTRO DI STUDIO N. 16

ESTRATTO

CARLO FELICE MANARA

SOLUZIONI TRASCENDENTI DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE DI QUINTO E DI SESTO GRADO

Istituto Lombardo di Scienze e Lettere

MILANO
1999

SOLUZIONI TRASCENDENTI DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE DI QUINTO E DI SESTO GRADO

CARLO FELICE MANARA (*)

ABSTRACT. – An intepretation of the algebraic equations of fifth and sixth degree is given, on the ground of classical transcendent functions related with algebraic plane curves.

1. Il presente lavoro si propone di richiamare ed illustrare alcuni problemi geometrici la cui soluzione conduce ad equazioni algebriche di quinto e di sesto grado; ovviamente le loro soluzione non è conseguibile con soli strumenti algebrici, ma può essere ottenuta con l'impiego di certe funzioni trascendenti classiche che possono essere collegate con la teoria delle curve algebriche.

Segue di qui che i problemi geometrici in parola possono essere guardati anche come illustrazioni geometriche delle procedure di soluzione trascendente delle equazioni algebriche di quinto e sesto grado.

Nei paragrafi 2-5 presenteremo una interpretazione della soluzione dell'equazione di quinto grado mediante funzioni ellittiche; nel paragrafo 6 presenteremo una interpretazione geometrica della soluzione dell'equazione algebrica di sesto grado mediante le funzioni "theta" collegate con una curva algebrica di genere 2.

2. In un piano, riferito a coordinate complesse x, y si consideri una cubica piano di genere 1, cubica che rappresenteremo con l'equa-

---

(*) Dipartimento di Matematica "F. Enriques", Università degli Studi di Milano.

zione:

$$y^2 = 4x^3 - mx - nx; \qquad x, y, m, n \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Indichiamo con $f(x)$ il polinomio:

$$f(x) = 4x^3 - mx - n \tag{2}$$

L'ipotesi che la (1) sia priva di punti doppi porta come conseguenza che la radici dell'equazione algebrica $f(x) = 0$ siano tutte distinte; e pertanto che il discriminante dell'equazione $f(x) = 0$ sia diverso da zero. Tale discriminante è dato, a meno di una costante moltiplicativa non nulla, dalla espressione:

$$D = n^3 - 27m^2 \tag{3}$$

Indichiamo con u l'integrale abeliano di prima specie collegato con la curva (1):

$$u = \int dx/y. \tag{4}$$

Adotteremo qui il linguaggio abituale delle esposizioni geometriche, linguaggio adottato peraltro dalla geometria algebrica classica, che viene anche detta "di scuola italiana".

Ciò permetterà una esposizione vicina alla intuizione geometrica elementare.

Come è noto, in questo atteggiamento, nelle trattazioni classiche, alla curva (1) si può far corrispondere una riemanniana a due fogli, che si possono immaginare sovrapposti al piano $\pi(x)$ della variabile complessa x. È noto che sulla riemanniana della (1) si possono rintracciare due cicli chiusi, e che a tali cicli corrispondono due periodi dell'integrale ellittico. Indichiamo con 2ω, $2\omega'$ i periodi dell'integrale (4), calcolato lungo due cicli, scelti come base dell'insieme di tutti i cicli del riemanniana. È noto che, in forza delle ipotesi ammesse, il rapporto tra i due periodi non può essere un numero reale; ciò permette di costruire sul piano della variabile complessa u il classico "parallelogramma dei periodi", al quale faremo riferimento anche nel seguito.

Inoltre è noto che, ad ogni cambiamento della base dei cicli sulla riemanniana, corrisponde una sostituzione sui periodi dell'integrale u.

Tali sostituzioni formano un gruppo, che è chiamato abitualmente "gruppo modulare" e può considerarsi generato dalle sostituzioni unitarie:

$$\bar{\omega}' = a\omega + b\omega'$$
$$\bar{\omega} = c\omega + d\omega'. \tag{5}$$

con a, b, c, d interi, soddisfacenti alla condizione fondamentale:

$$ad - bc = 1. \tag{6}$$

3. È noto che è possibile rappresentare parametricamente le coordinate (complesse) di un punto della cubica (2-1) mediante funzioni doppiamente periodiche della variabile complessa u, definita dalla (2-4), aventi come periodi 2ω e $2\omega'$.

Per gli scopi che abbiamo in vista è particolarmente adatta la classica funzione $\wp(u)$ di Weierstrass. Indicando con i simboli $\wp'$, $\wp''$ la derivata prima, seconda della funzione rispetto alla variabile u, la rappresentazione parametrica delle coordinate x e y dei punti della cubica (2-1) è data da:

$$x = \wp(u); \qquad y = \wp'(u); \tag{1}$$

quindi la funzione (u) di Weiertrass risulta soluzione della equazione differenziale:

$$(\wp')^2 = 4(\wp)^3 - m\wp - n. \tag{2}$$

È noto che la teoria degli integrali ellittici rientra, come caso particolare, in quella degli integrali abeliani collegati ad una curva algebrica; nel caso della curva (2-1) il classico teorema di Abel legato agli integrali di prima specie permette la formulazione e la dimostrazione di interessanti proprietà della curva stessa.

Nel caso delle cubica (2-1) e dell'integrale u, si sceglie classicamente l'origine dei cammini di integrazione nel flesso che la curva possiede nel punto improprio dell'asse delle y. Con tale scelta è possibile formulare in modo particolarmente semplice certe proprietà della curva che verranno richiamate al seguito.

In particolare, indicati con P_1. P_2. P_3 tre punti della (2-1), e con u_1, u_2, u_3 i valori digli integrali ellittici rispettivamente calcolati nei punti, scegliendo l'origine dei cammini di integrazione nel modo detto poco sopra, la condizione necessaria e sufficiente perché i tre punti in parola siano allineati può essere espressa con la relazione:

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2\omega, 2\omega'). \tag{5}$$

In particolare, la condizione necessaria e sufficiente perché due punti P_1 e P_2 siano allineati con il punto improprio dell'asse y è data da:

$$u_1 + u_2 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2\omega, 2\omega'). \tag{5 bis}$$

Analogamente si dimostra che, considerati 6 punti P_i $(i = 1, \ldots, 6)$ della cubica (1-1), ed indicati con u_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ i valori assunti in essi dall'integrale ellittico, la condizione necessaria e sufficiente affinché tali punti appartengano ad una conica si esprime nella forma:

$$\sum_{i=1}^{6} u_i \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2\omega, 2\omega'). \tag{6}$$

4. Le proprietà delle funzioni, che abbiamo brevemente e sommariamente richiamato, permettono di impostare e risolvere vari problemi geometrici che conducono ad equazioni di V° grado; presenteremo ed illustreremo nelle pagine che seguono uno di tali problemi in forma elementare.

Precisamente si consideri il sistema lineare di coniche rappresentate dalle equazioni:

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0. \tag{1}$$

Tale sistema ha di dimensione 4, e le sue coniche intersecano la cubica (1) in 5 punti variabili con i parametri a_{ik}, fuori del flesso all'infinito dell'asse y, che è stato scelto come origine dei cammini di integrazione.

Il problema di ricercare le coniche del sistema (1) che hanno un contatto 5-punto con la cubica può essere ricondotto alla ricerca dei valori del parametro ellittico u, che, in forza delle relazioni scritte nel § precedente, soddisfano alla relazione:

$$5u \equiv 0 \qquad (mod. \ 2\omega, 2\omega'). \tag{2}$$

I valori di u che soddisfano alla condizione (2) sono dati dalla formula

$$u = (2r\omega + 2s\omega')/5 \tag{3}$$

dove r ed s sono interi. In forza della doppia periodicità delle funzioni ellittiche ci si può limitare a prendere in considerazione i valori di r ed s compresi tra zero e 4 (estremi inclusi).

I valori del parametro u corrispondenti ai punti cercati sono elencati nella Tabella 1 acclusa

∞	$2\omega/5$	$4\omega/5$	$6\omega/5$	$8\omega/5$
0	$2\omega'/5$	$4\omega'/5$	$6\omega'/5$	$8\omega'/5$
1	$\frac{2\omega+2\omega'}{5}$	$\frac{4\omega+4\omega'}{5}$	$\frac{6\omega+6\omega'}{5}$	$\frac{8\omega+8\omega'}{5}$
2	$\frac{4\omega+2\omega'}{5}$	$\frac{8\omega+4\omega'}{5}$	$\frac{2\omega+6\omega'}{5}$	$\frac{6\omega+8\omega'}{5}$
3	$\frac{6\omega+2\omega'}{5}$	$\frac{2\omega+4\omega'}{5}$	$\frac{8\omega+6\omega'}{5}$	$\frac{4\omega+8\omega'}{5}$
4	$\frac{8\omega+2\omega'}{5}$	$\frac{6\omega+4\omega'}{5}$	$\frac{4\omega+6\omega'}{5}$	$\frac{2\omega+8\omega'}{5}$

Le singole righe della tabella sono contrassegnate degli indici ∞, 1, 2, 3, 4 rispettivamente, indici che si riferiscono ovviamente al rapporto r/s (ridotto rispetto al modulo 5) che compete ai valori di u forniti dalla (3) appartenenti ad ogni riga; in ogni singola riga poi i valori che compaiono nella 2ª, 3ª, 4ª colonna sono rispettivamente il doppio, il triplo, il quadruplo del valore che compare nella prima (sempre a meno di multipli dei periodi 2ω, $2\omega'$).

Si vede poi facilmente che, considerata una riga qualunque della tabella, la funzione $\mathcal{P}(u)$ assume lo stesso valore quando si danno ad u i valori che compaiono nella prima e quarta colonna, oppure quando si danno ad u i valori che compaiono nella seconda e terza colonna.

In forza di quanto è stato detto poco sopra, ed in particolare ricordando la (3-5bis) si conclude che ad ogni riga della tabella corrisponde una conica degenere in due rette parallele all'asse delle y.

5. Ritornando ora a considerare le sostituzioni del gruppo dato dalle (2-5,6), si verifica che esso può essere generato dalle due sostituzioni fondamentali:

$$(1) \qquad S \begin{cases} \bar{\omega} = \omega \\ \bar{\omega}' = \omega+\omega' \end{cases} \qquad U \begin{cases} \bar{\omega} = -\omega' \\ \bar{\omega}' = \omega \end{cases}$$

In corrispondenza alle sostituzioni (1), si verifica che le linee della Tab. 1 vengono sostituite con le operazioni sugli indici, che indicheremo ancora on S ed U:

$$(2) \qquad \begin{array}{lll} S) & \nu' \equiv \nu + 1 & \text{(mod. 5)} \\ U) & \nu\nu' \equiv -1 & \text{(mod. 5).} \end{array}$$

È noto che le formule (2) vanno intese in senso convenzionale per quanto riguarda l'indice ∞: precisamente si conviene che la S lasci fermo l'indice ∞ e che la U scambi tra loro gli indici 0 ed ∞.

È noto che il gruppo di sostituzioni tra le righe della Tab. 1 generato dalle (3) è isomorfo al gruppo icosaedrico, dei movimenti rigidi che portano in se stesso un icosaedro regolare.

Si verifica inoltre che la equazione che conduce alla determinazione delle 6 coniche degeneri di cui al precedente paragrafo è birazionalmente identica all'equazione di 6° grado di Jacobi, relativa alla divisione per 5 dei periodi delle funzioni ellittiche.

Indicando convenzionalmente con $v_\infty, v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$, le radici dell'equazione di 6° grado nominata, è noto che con esse si possono costruire varie funzioni che acquistano soltanto 5 valori per le sostituzioni del gruppo icosaedrico.

La scrittura effettiva dell'equazione di 5° grado che hanno come radici i valori di tali funzioni richiede calcoli che possono essere complicati, ma che non offrono difficoltà concettuali, e che non riportiamo qui.

Ci limitiamo a ricordare che, scegliendo come funzione delle v_i la seguente:

$$(3) \qquad \psi = [(v_\infty - v_0)(v_1 - v_2)(v_3 - v_4)]^2$$

è possibile giungere ad una equazione di 5° grado della forma:

$$(4) \qquad t^5 - 10\,a\,t^2 + 45\,a^2\,t + k = 0$$

Questa equazione può a sua volta essere ricondotta alla cosiddetta "forma normale di Brioschi" dell'equazione di 5° grado. Forma a cui si può ricondurre, con trasformazioni di Tschirnhaus, la equazione generale di 5° grado, con la risoluzione di equazioni di grado non superiore al secondo.

6. Esporremo qui brevemente i principi della soluzione trascendente dell'equazione algebrica di 6° grado, utilizzando ancora una volta il vocabolario e lo spirito della geometria algebrica classica.

Per gli scopi che ci interessano scriveremo l'equazione della forma seguente:

$$f(x) = x^6 + \sum_{i=1}^{5} a_i x^i = 0 \qquad ; x, a_i \in \mathbb{C}; \tag{1}$$

e supporremo che sia valida la condizione:

$$a_1 \neq 0, \tag{2}$$

condizione che non pone sostanziali limitazioni al nostro discorso.

Si consideri ora un polinomio di 3° grado nella variabile x:

$$B_3(x) = \sum_{j=0}^{3} b_j x^{3-j} \qquad b_j \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Si verifica che, quando si abbia:

$$b_0^2 = 1; \qquad 2\, b_0\, b_1 = a_1 \tag{4}$$

è possibile costruire un polinomio di 4° grado:

$$C_4(x) = f(x) - [B(x)]^2. \tag{5}$$

Di conseguenza la (1) può essere considerata come l'equazione della ricerca delle soluzioni doppie di una equazione in y, che scriveremo nella forma:

$$y^2 - 2y\, B_3(x) - C_4(x) = G(x, y) = 0. \tag{6}$$

Interpretando x ed y come coordinate cartesiane (complesse) in un piano, diremo che la (6) rappresenta una quartica di quel piano. Nella ipotesi che la (1) non abbia radici doppie, tale quartica risulta avere genere 2. In questo caso le rette di equazione:

$$x = h \quad \text{(costante)}$$

secano sulla (6) la serie canonica; quindi l'equazione (1) può essere interpretata come l'equazione della ricerca dei punti doppi della serie canonica della curva (6).

Pertanto è possibile utilizzare le teorie classiche delle trascendenti legate alle curve algebriche per risolvere il problema che ci interessa.

In questo ordine di idee ricorderemo che la curva (6) può essere rappresentata su una superficie riemanniana a due fogli, con 6 punti di diramazione. Su questa riemanniana di genere 2 si possono scegliere 2 coppie di cicli unidimensionali, che costituiscono una base per tutti i cicli cosiffatti della superficie.

Inoltre si definiscono su questa riemanniana due integrali abeliani di prima specie, che possono essere espressi nella forma:

$$(8) \qquad u_1 = \int \frac{dx}{\frac{DG}{Dy}} \qquad ; u_2 == \int \frac{xdx}{\frac{DG}{Dy}}.$$

Classici teoremi di Riemann, permettono di accertare che è possibile scegliere la base dei cicli unidimensionali sulla riemanniana, e sottoporre i due integrali abeliani a sostituzioni lineari in modo tale che la "tabella dei periodi" degli integrali stessi lungo i cicli sia rappresentata da una matrice rettangolare, che si suole scrivere nella forma

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} \pi i & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & \pi i & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Inoltre i periodi a_{ik} costituiscono una matrice simmetrica; infine si ha che, ponendo in evidenza le parti reale ed immaginaria di ogni numero complesso a_{rs}, nella forma

$$(10) \qquad a_{rs} = a'_{rs} + i\, a''_{rs} \qquad (r, s = 1, 2),$$

la forma quadratica a variabili reali x_r, x_s:

$$(11) \qquad \sum_{r,s} {}' a'_{rs}\, x_r\, x_s$$

risulta essere definita negativa.

7. Le proprietà dei periodi degli integrali abeliani di prima specie, relativi alla riemanniana della curva (6-6) permettono di costruire le note "funzioni theta". La procedura classica che conduce a questo scopo può essere sommariamente esposta al modo seguente: si costruiscono due funzioni

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi = \sum_{r,s} a_{rs}\, n_r\, n_s & r, s = 1, 2 \\ \Psi = \sum_r' n_r u_r & n_r\, n_s \in Z \end{cases}$$

con le quali si definisce la serie multipla:

$$(2) \qquad \theta(u) = exp\ (\varphi + \psi).$$

La ricordate proprietà della tabella dei periodi degli integrali abeliani permettono di dimostrare che gli zeri di queste funzioni sono disposti periodicamente. Conseguenza di queste proprietà è la possibilità di risolvere il cosiddetto "problema di inversione", cioè di determinare le funzioni simmetriche delle coordinate di gruppi di 2 punti della curva, in funzione delle funzioni dei valori calcolate nei punti stessi.

Il caso della serie di coppie di punti secate sulla curva (6-6) dalle rette (6-7) (serie canonica) può essere trattato esaurientemente con la costruzione di particolari serie "theta con caratteristica". Tali serie permettono anche, in particolare, di determinare i punti doppi della serie canonica, cioè le soluzioni dell'equazione generale di 6° grado, secondo quanto è stato osservato nel § 6.